

## 2 (решение уравнений)

**Тема:** Численные методы решения уравнений.

**Что нужно знать:**

- далеко не для всех уравнений можно получить аналитическое решение, то есть, решение в виде формулы
- если уравнение нельзя решить аналитически, приходится искать приближённое (неточное) решение с помощью численных методов, которые позволяют получить число, близкое к решению уравнения
- для численного решения уравнений можно использовать электронные таблицы или собственную программу (считать вручную тоже можно, но очень долго!)
- многие алгоритмы численного решения (в том числе алгоритмы в электронных таблицах) используют *начальное приближение* – значение, с которого начинается поиск
- если уравнение имеет несколько решений, то решение, которое находит алгоритм поиска, зависит от выбранного начального приближения; поэтому начальное приближение нужно выбирать как можно ближе к тому решению, которое нас интересует
- если известен отрезок, на котором находится одно и только решение уравнения, удобно использовать метод деления отрезка пополам (его описание можно найти в любых учебниках);
- метод деления отрезка пополам позволяет оценить ошибку вычислений: если мы выяснили, что корень уравнения находится внутри отрезка  $[a; b]$ , то за решение можно принять его середину; при этом наибольшая ошибка – отклонение полученного приближённого решения от истинного – не превышает половины длины отрезка  $[a; b]$

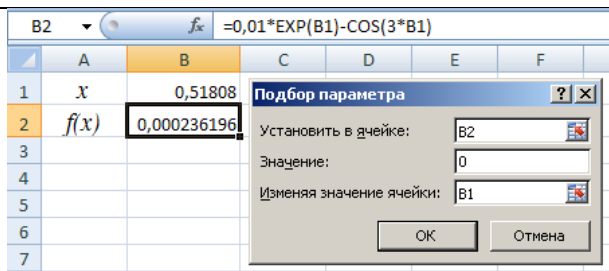
### Пример задания:

**Р-01.** Известно, что уравнение  $0,01e^x = \cos(3x)$  на отрезке  $[0; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приблизительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.

**Важно!** По утверждению организаторов ЕГЭ, тестирующая система будет считать правильным не один ответ, а целый диапазон (с возможной ошибкой в последней указанной значащей цифре). Например, если точный ответ находится внутри отрезка  $[9,12345; 9,12346]$ , правильными считаются ответы 9,12345 и 9,12346.

**Решение (электронные таблицы Excel):**

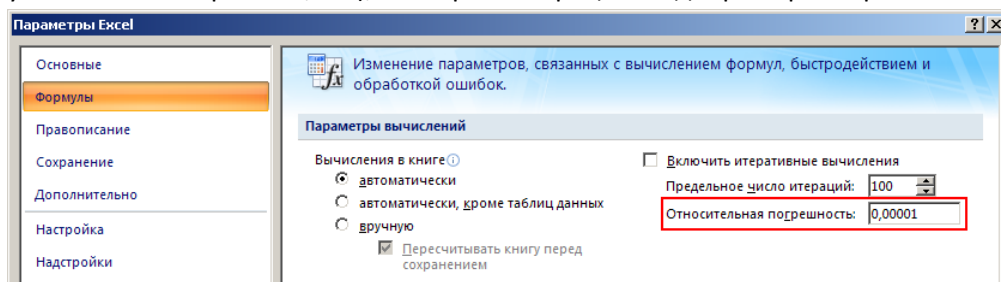
- 1) удобнее сразу привести уравнение к стандартной форме  $f(x) = 0$ , где в нашем случае  $f(x) = 0,01e^x - \cos(3x)$
- 2) чтобы найти решение нелинейного уравнения в электронных таблицах, можно использовать подбор параметра
- 3) в одну ячейку (на рисунке – B1) помещаем начальное значение  $x$  (можно взять, например, середину заданного отрезка); в другую ячейку (на рисунке это B2) вводим формулу для вычисления функции  $f(x)$
- 4) для ячейки B1 оставляем 5 знаков в дробной части (как в задании), чтобы сразу получить нужное значение  $x$  с округлением
- 5) после этого вызываем окно подбора параметра (в Excel: *Данные – Анализ что-если – Подбор параметра*):



в целевой ячейке B2 (где вычисляется функция) нужно установить значение 0, изменяя значение  $x$  в изменяемой ячейке B1

**Важно:** в результате получаем значение 0,51808, но в ячейке B2 видим, что ошибка достаточно велика (0,00236196), поэтому нельзя гарантировать, что мы нашли решение с требуемой точностью 0,00001.

- 6) чтобы задать точность вычисления при подборе параметра, зайдём в окно настройки параметров Excel и установим относительную погрешность 0,00001 или меньше (по умолчанию она равна 0,001); повторим операцию подбора параметра



- 7) теперь получается так:

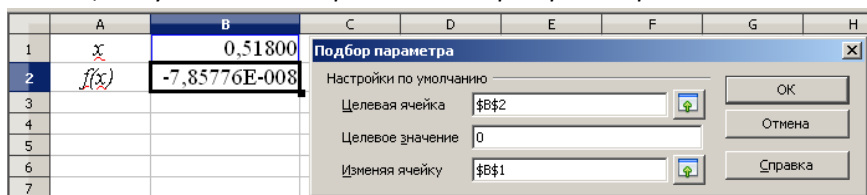
	A	B
1	$x$	0,51800
2	$f(x)$	-3,222E-08

очень маленькая ошибка  $3,222 \cdot 10^{-8}$  говорит о том, что точности, скорее хватает

- 8) Ответ: **0,51800**

### Решение (электронные таблицы Calc):

- 1) все действия выполняются так же, как и в Excel; окно подбора параметра вызывается с помощью пункта меню *Сервис – Подбор параметра*

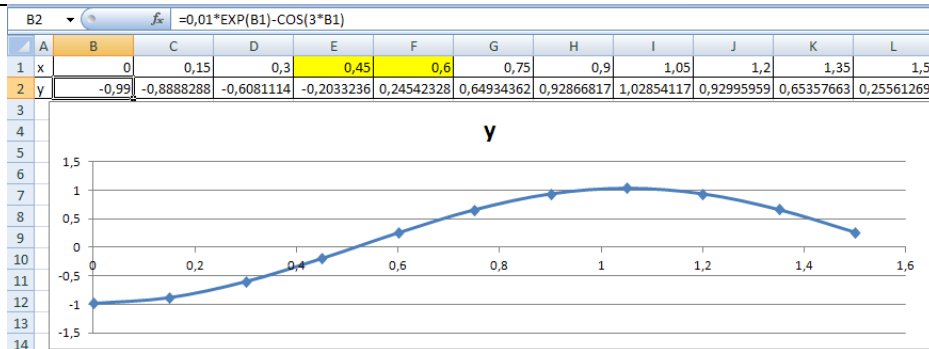


- 2) Ответ: **0,51800**

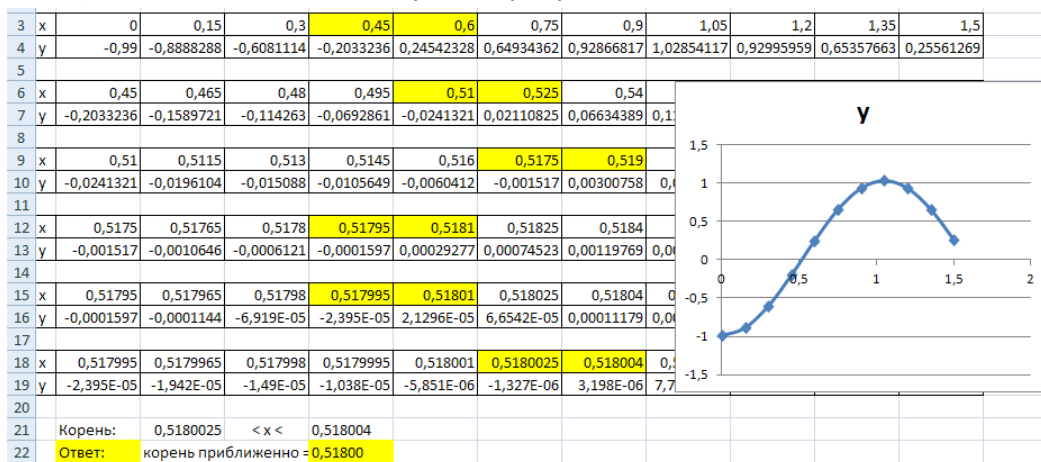
**Важно:** в некоторых версиях LibreOffice решатель в данной задаче находит неверное решение 2,574, которое находится вне заданного отрезка  $[0; 1,5]$ .

### Решение (метод подбора, Б.С. Михлин):

- После приведения уравнения к стандартному виду  $y = f(x) = 0$  делим заданный интервал по оси  $x$   $[0; 1,5]$  на десять равных частей и строим таблицу со строками  $x$ ,  $y$ .
- Для наглядности по этой таблице желательно построить обзорный график функции. График функции достаточно построить только для исходного интервала, т.к. для более мелких интервалов график будет практически прямой линией.



- Для непрерывной на отрезке функции  $f(x)$  корень это такая точка на оси  $x$ , где график функции пересекает ось  $x$  и, следовательно, функция  $f(x)$  меняет свой знак (с отрицательного на положительный или наоборот) или касается оси  $x$  ( $f(x) = 0$ ).
- В этой таблице находим интервал на оси  $x$  (в данном примере это  $[0,45; 0,6]$ ) на котором  $f(x)$  меняет знак (с отрицательного на положительный).
- Этот интервал  $([0,45; 0,6])$  снова делим на десять частей, строим таблицу и находим новый (уже в десять раз более узкий) интервал оси  $x$ , где функция  $f(x)$  меняет свой знак  $([0,51; 0,525])$  и т.д., пока не найдем корень с требуемой точностью.



- Можно организовать такой перебор и с помощью всего двух строк, если задавать в отдельных ячейках границы интервала, а все остальные данные (шаг изменения переменной  $x$ , значения  $x$  и соответствующие значения функции  $f(x)$ ) вычислять по формулам:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	a	0,517995						
3	b	0,51801						
4	шаг	=(B3-B2)/10						
5								
6	x	=B2	=B6+\$B\$4	=C6+\$B\$4	=D6+\$B\$4	=E6+\$B\$4	=F6+\$B\$4	=G6+\$B\$4
7	y	=0,01*EXP(B6)-COS(3*B6)	=0,01*EXP(C6)	=0,01*EXP(D6)	=0,01*EXP(E6)	=0,01*EXP(F6)	=0,01*EXP(G6)	=0,01*EXP(H6)

- Ответ: 0,51800

#### Решение (программа на языке Python):

- наиболее надёжный вариант – написать программу, которая ищет решение методом деления отрезка пополам:

```

from math import cos, exp          # подключить функции cos, exp

def f(x):                          # это функция f(x)
    return 0.01*exp(x) - cos(3*x)

a, b = 0, 1.5                      # границы отрезка

```

```

while b-a > 1e-6:           # пока ширина отрезка >= 10-6
    c = (a + b) / 2         # середина отрезка
    if f(a)*f(c) <= 0:      # сдвигаем правую или левую границу
        b = c
    else: a = c

# вывод с 5 знаками в дробной части
print( "{:.5f}".format((a + b) / 2) )

```

- 2) Ответ: **0.51800**
- 3) мы «загоняем» решение в маленький отрезок [a; b]
- 4) за решение принимается его середина  $(a + b) / 2$ ; при этом наибольшая ошибка не превышает половины длины отрезка, то есть  $(b - a) / 2$
- 5) значение  $1e-6$  ( $10^{-6}$ ) взято с запасом, для получения ошибки не более  $10^{-5}$  («решить с точностью не менее, чем 0,00001») достаточно сделать ширину отрезка [a; b] меньше, чем  $2 \cdot 10^{-5}$
- 6) формат "{:.5f}" означает «вывести число с фиксированной запятой с 5 знаками в дробной части»

#### Решение (программа на языке Pascal):

- 1) аналогичная программа на языке Pascal:

```

function f(x: double): double;
begin
    f := 0.01*exp(x) - cos(3*x)
end;
var a, c, b: double;
begin
    a := 0; b := 1.5;
    while b-a > 1e-6 do begin
        c := (a + b) / 2;
        if f(a)*f(c) <= 0 then
            b := c
        else a := c
    end;
    writeln( (a+b)/2:0:5 )
end.

```

- 2) Ответ: **0.51800**

#### Решение (программа на языке C++):

- 1) аналогичная программа на языке C++:

```

#include <iostream>
#include <cmath>
double f(double x) {
    return 0.01*exp(x) - cos(3*x);
}
int main()
{
    double a = 0, b = 1.5;
    while( b - a > 1.e-6 ) {
        double c = (a + b) / 2;
        if( f(a)*f(c) <= 0 )
            b = c;
    }
}

```

```
else a = c;  
}  
std::cout.precision(5);  
std::cout << std::fixed << (a+b)/2;  
}
```

2) Ответ: 0.51800

### Задачи для тренировки:

- 1) Известно, что уравнение  $0,02e^{2x} = 4\sin(5x)$  на отрезке  $[1; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 2) Известно, что уравнение  $0,02e^{2x} = 4\sin(6x)$  на отрезке  $[1,8; 2,4]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 3) Известно, что уравнение  $0,02e^{3x} = 12\cos(3x)$  на отрезке  $[1; 2]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 4) Известно, что уравнение  $0,01e^{0,5x} = 5\cos(4x)$  на отрезке  $[1,5; 2]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 5) Известно, что уравнение  $0,01e^{2x} = \cos(12x)$  на отрезке  $[1,5; 1,8]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 6) Известно, что уравнение  $0,01e^{2x} = 5\cos(7x)$  на отрезке  $[2,4; 2,7]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 7) Известно, что уравнение  $2\sin(4x) = 5\cos(7x)$  на отрезке  $[1; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 8) Известно, что уравнение  $5\sin(3x) = 3\cos(7x)$  на отрезке  $[2; 2,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 9) Известно, что уравнение  $3\sin(8x) = 2\cos(5x)$  на отрезке  $[1,5; 2]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 10) Известно, что уравнение  $2\sin(5x) = \cos(3x)$  на отрезке  $[1,5; 2]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 11) Известно, что уравнение  $2\sin(5x) = 3\cos(6x)$  на отрезке  $[1; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 12) Известно, что уравнение  $3\sin(3x) = -2\cos(4x)$  на отрезке  $[-1; 0]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.

- 13) Известно, что уравнение  $3\sin(3x) = -2\cos(4x)$  на отрезке  $[0; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 14) Известно, что уравнение  $3\sin(5x) = -2\cos(-3x)$  на отрезке  $[-1; -0,3]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 15) Известно, что уравнение  $4\sin(8x) = -2\cos(-3x)$  на отрезке  $[-1; -0,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 16) Известно, что уравнение  $4\sin(8x) = -2\cos(-3x)e^{-2x}$  на отрезке  $[0; 0,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 17) Известно, что уравнение  $2\sin(4x) = -\cos(-3x)e^{-2x}$  на отрезке  $[0; 1]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 18) Известно, что уравнение  $2\sin(7x) = -3\cos(5x)e^x$  на отрезке  $[0,5; 1,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 19) Известно, что уравнение  $2\sin(7x)e^{-2x} = -3\cos(5x)e^x$  на отрезке  $[-1; -0,5]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.
- 20) Известно, что уравнение  $3\sin(3x)e^x = -2\cos(4x)e^{2x}$  на отрезке  $[0; 1]$  имеет единственный корень. Найдите его приближительное значение с точностью не менее 0,00001 и запишите в ответе найденное значение ровно с пятью значащими цифрами после запятой.